第 5 讲： MATLAB 优化模型求解方法(上)：标准模型

作者：Effie Ruan， MathWorks 中国

最优化赛题是数学建模大赛中最常见的问题类型之一。一般说来，凡是寻求最大、最小、最远、最近、最经济、最丰富、最高效、最耗时的目标，都可以划入优化问题的范畴。MATLAB 优化工具箱和全局优化工具箱对多个优化问题提供了完整的解决方案，前者涵盖了线性规划、混合整型线性规划、二次规划、非线性优化、非线性最小二乘的求解器，后者囊括了全局搜索、多初始点、模式搜索、遗传算法等求解算法。

本讲主要介绍如何使用优化工具箱求解数学建模中标准的优化模型。更多的内容，欢迎大家浏览 MathWorks 官网以及 MATLAB 软件文档。

1. 聊一聊最优化问题

最优化即在一定的条件下，寻求使目标最小（大）的设计参数或决策。在优化问题中有两个关键对象：目标函数和约束条件（可选）。常规优化问题，其数学表达可以描述为：

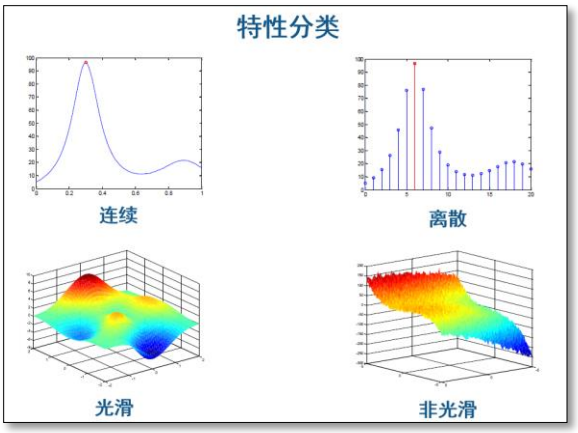
$$\min_{x} f(x)$$

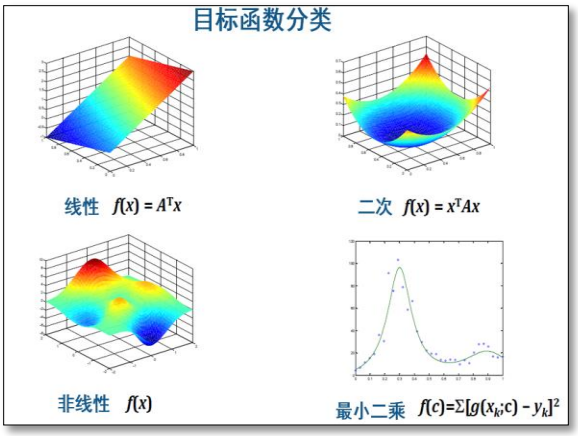
$$G_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m_e,$$

$$G_i(x) \le 0 \quad i = m_e + 1, \ldots, m,$$

其中 x 为长度 n 的决策变量向量，f(x) 为目标函数，G(x) 为约束函数。

求解目标函数的最小（大）值，一个高效而精确的解决方案不仅取决于约束条件和变量数量，更取决于目标函数和约束函数的特性。明确优化类型是确认优化方案的前提，让我们看一下这些特性如何划分：





常见的目标函数有：

线性规划：被广泛的应用于变量之间可线性表示的财务、能源、运营研究等现代管理领域中。

混合整数线性规划：扩展了线性规划问题，增加了最优解中部分或全部变量必须是整数的约束。例如，如果一个变量代表要认购的股票数量，则只应取整数值。同样，如果一个变量代表发电机的开/关状态，则只应取二进制值（0 或 1）。

二次规划：目标函数或约束函数为多元二次函数。此优化应用于财务金融中投资组合优化、发电厂发电优化、工程中设计优化等领域。

最小二乘：分为线性和非线性，通过最小化误差的平方和寻找变量的最优函数匹配。非线性最小二乘优化还可用于曲线拟合。

2. 优化求解器太多了，怎么选？

对 MATLAB 提供的各类优化问题的算法，我们称之为求解器（Solver）。根据其求解目标，被分为四大组：

- 极小值优化组：找到目标函数出发点 x0 附近的局部极小值
- 多目标优化组：找到最小化一组函数的最大值或指定的值
- 方程求解组：找到非线性方程 f(x) = 0 出发点 x0 附近的解
- 最小二乘法（曲线拟合）组：最小化平方和

仅优化工具箱就提供了近 20 种求解器，面对如此繁多的选项，用户往往一头雾水。幸好，MATLAB 提供了简单明了的参考工具 —— 优化决策表。可谓一表在手，优化不愁：

约束函数类型	目标函数类型				
	线性	二次	最小二乘	光滑非线性	非光滑
无	无	quadprog Information	mldivide lsqcurvefit lsqnonlin Information	fminsearch fminunc Information	fminsearch *
边界	linprog Information	quadprog Information	lsqcurvefit lsqlin lsqnonlin lsqnonneg Information	fminbnd fmincon fseminf Information	fminbnd *
线性	linprog Information	quadprog Information	lsqlin Information	fmincon fseminf Information	*
光滑	fmincon Information	fmincon Information	fmincon Information	fmincon fseminf Information	*
离散（上下限或离散）	intlinprog Information	*	*	*	*

上表中*表示算法由全局工具箱提供。此外，多目标优化与方程组求解器并未被此表列举，更多求解器的选择方案，可以查看这里。

3. 写出漂亮、高效的代码

确认优化策略后，就可以开工写代码了。下面让我们通过一个例子，了解编写高效优化算法代码的步骤和注意事项。

【题目】

- 目标函数

```
0.002614 HPS + 0.0239 PP + 0.009825 EP
```

- 约束函数（所有变量为正）

```
2500 ≤ P1 ≤ 6250
I1 ≤ 192,000
C ≤ 62,000
I1 - HE1 ≤ 132,000
I1 = LE1 + HE1 + C
1359.8 I1 = 1267.8 HE1 + 1251.4 LE1 + 192 C + 3413 P1
3000 ≤ P2 ≤ 9000
I2 ≤ 244,000
LE2 ≤ 142,000
I2 = LE2 + HE2
1359.8 I2 = 1267.8 HE2 + 1251.4 LE2 + 3413 P2
HPS = I1 + I2 + BF1
HPS = C + MPS + LPS
LPS = LE1 + LE2 + BF2
MPS = HE1 + HE2 + BF1 - BF2
P1 + P2 + PP ≥ 24,550
EP + PP ≥ 12,000
MPS ≥ 271,536
LPS ≥ 100,623
```

【解答】

a. 首先，根据题目确认这是一个线性规划问题。而线性规划的通用数学表达式和 MATLAB 标准形式为：

$$\min_{x} f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

创建符合标准格式的 A、b、Aeq、beq、lb、ub 参数，才可以顺利的运行优化算法。

b. 对于线性规划的优化求解步骤（也适用于其他优化方案），建议如下：
   1) 选择优化求解器
   2) 将所有变量合并为一个向量
   3) 创建边界约束（lb，ub）
   4) 创建线性不等式约束（A，b）
   5) 创建线性等式约束（Aeq，beq）
   6) 创建目标函数
   7) 优化问题求解
   8) 结果检验

c. MATLAB 代码和注释：

```matlab
% 由优化决策表，确认线性规划求解，可由linprog实现
% 将所有变量合并为一个向量，共16个变量
variables = {'I1','I2','HE1','HE2','LE1','LE2','C','BF1',...
    'BF2','HPS','MPS','LPS','P1','P2','PP','EP'};
N = length(variables);
for v = 1:N
   eval([variables{v},' = ', num2str(v),';']);
end

% 设置上下限约束（lb <= x <= ub）
lb = zeros(size(variables));
lb([P1,P2,MPS,LPS]) = [2500,3000,271536,100623];

ub = Inf(size(variables));
ub([P1,P2,I1,I2,C,LE2]) = [6250,9000,192000,244000,62000,142000];

% 创建线性不等式约束（A*x <= b）
A = zeros(3,16);
A(1,I1) = 1; A(1,HE1) = -1; b(1) = 132000;
A(2,EP) = -1; A(2,PP) = -1; b(2) = -12000;
A(3,[P1,P2,PP]) = [-1,-1,-1];
b(3) = -24550;
```

```matlab
% 创建线性等式约束（Aeq*x = beq）
Aeq = zeros(8,16); beq = zeros(8,1);
Aeq(1,[LE2,HE2,I2]) = [1,1,-1];
Aeq(2,[LE1,LE2,BF2,LPS]) = [1,1,1,-1];
Aeq(3,[I1,I2,BF1,HPS]) = [1,1,1,-1];
Aeq(4,[C,MPS,LPS,HPS]) = [1,1,1,-1];
Aeq(5,[LE1,HE1,C,I1]) = [1,1,1,-1];
Aeq(6,[HE1,HE2,BF1,BF2,MPS]) = [1,1,1,-1,-1];
Aeq(7,[HE1,LE1,C,P1,I1]) = [1267.8,1251.4,192,3413,-1359.8];
Aeq(8,[HE2,LE2,P2,I2]) = [1267.8,1251.4,3413,-1359.8];

f = zeros(size(variables));

% 创建目标函数
f([HPS PP EP]) = [0.002614 0.0239 0.009825];

% 优化问题求解，求解线性规划问题，由linprog实现
options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex');
[x, fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options);
for d = 1:N
  fprintf('%12.2f \t%s\n',x(d),variables{d})
end
```

d. 优化结果：

```
Optimal solution found.
   136328.74    I1
   244000.00    I2
   128159.00    HE1
   143377.00    HE2
        0.00    LE1
   100623.00    LE2
     8169.74    C
        0.00    BF1
        0.00    BF2
   380328.74    HPS
   271536.00    MPS
   100623.00    LPS
     6250.00    P1
     7060.71    P2
    11239.29    PP
      760.71    EP
```

e. 如果结果不满意，可以调整优化选项，迭代计算。

4. 整数规划求解神器

在优化问题中， 经常会遇到整数规划问题， 尤其是0-1规划问题， MATLAB对于整数规划问题，有个专门的求解器intlinprog。 该函数不仅可以求解一般的整数规划问题(0-1规划更是小菜啦)，还可以求解混合整数规划问题，也就是决策变量既可以是整数也可以是小数，只要指定是整数的决策变量的编号就是可以啦。 通过一个具体的例子， 来看看这个函数的使用。

求解的问题是这个样子的：

$$\text{Max } z=3x_1-2x_2+5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+2x_2-x_3\le 2 \\ x_1+4x_2+x_3\le 4 \\ x_1+x_2\le 3 \\ 4x_2+x_3\le 6 \\ x_1,x_2,x_3=0\text{或}1 \end{cases}$$

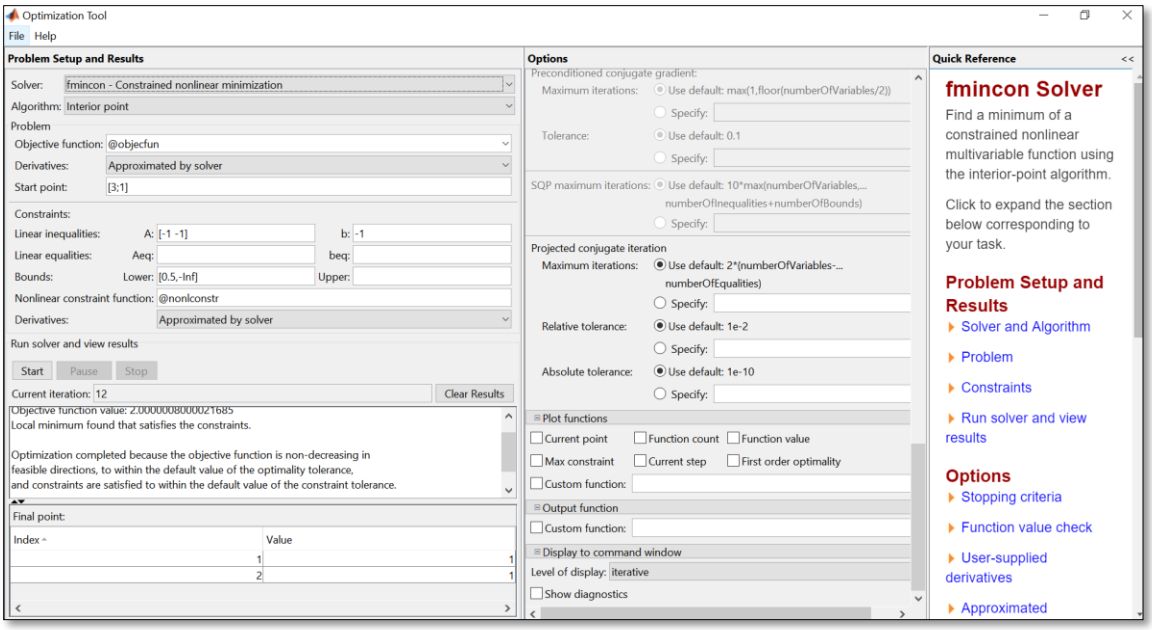
求解的代码是这个样子的：

```
f=[-3; 2; -5];
intcon=[1,2,3];
A=[1 2 -1; 1 4 1; 1 1 0; 0 4 1];
b=[2; 4; 3; 6];
lb=[0, 0 , 0];
ub=[1,1,1];
Aeq=[0,0,0];
beq=0;
x = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
```

运行代码， 可很快得到最优解 x = [1 0 1]。

5. 受欢迎的图形化应用

MATLAB 在数据分析领域如此受欢迎，除了其提供丰富的内置算法集，还有各类友好的应用界面。在优化工具箱中，也有这么一个强大的工具——Optimization App，可以在 MATLAB Apps 窗口或者运行 optmitool 命令打开。它是一个交互式的图形化应用工具，无需手写代码，直接在图形界面中设置各类求解器、配置目标函数、约束条件，即可运行优化算法并使中间结果和最终结果可视化。



在 Optimization App 中，只需点击菜单栏中的 File > Generate Code，即可将 App 中的各项设置自动生成 MATLAB 代码，用户可实现算法的复用和二次开发。

此外，面对越来越复杂的优化问题，如何加快算法的运行也是我们经常听到的问题。针对这个需求，可以结合 MATLAB 并行计算工具箱，利用电脑的多核硬件资源，实现算法加速，有兴趣的用户可以观看视频做更多的了解。

关于作者

阮卡佳， MathWorks 中国应用工程师，浙江大学电子信息工程学士、伦敦帝国理工通讯工程硕士；曾就职于北电网络和 Altera 中国