FUDAN UNIVERSITY

从数据中学习

—— 微分方程数值解法的创新与工业应用

程晋, 复旦大学

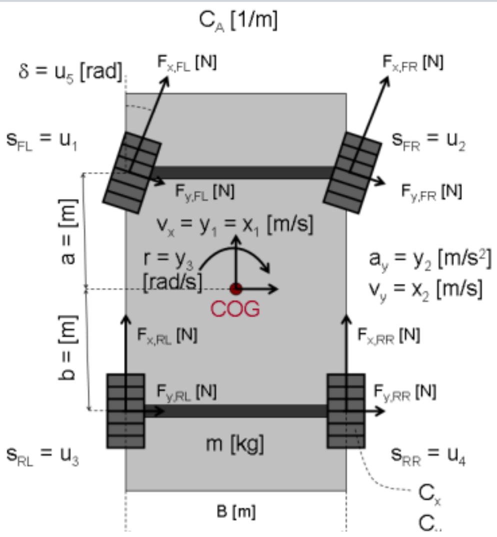
MATLAB EXPO

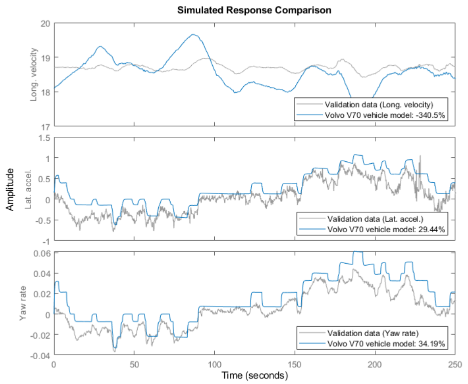
微分方程无处不在

常微分方程

- 例如：车辆动力学模型

$$\frac{dx}{dt} = F(t, u(t), x(t), p1, \dots, p6)$$
$$y(t) = H(t, u(t), x(t), p1, \dots, p6) + e(t)$$

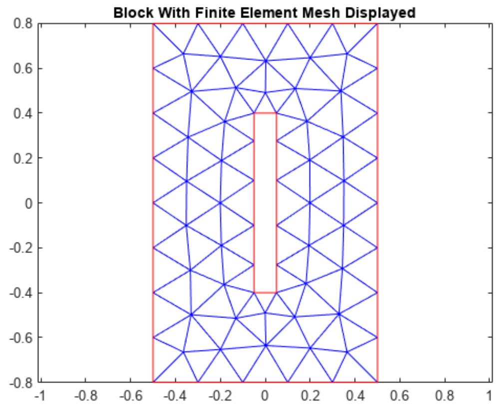


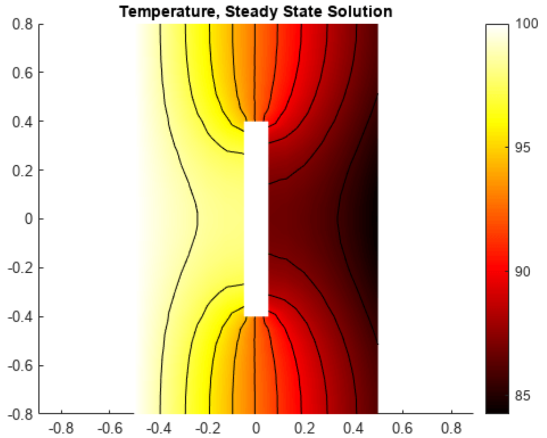


拉普拉斯方程

- 例如：电势，传热

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

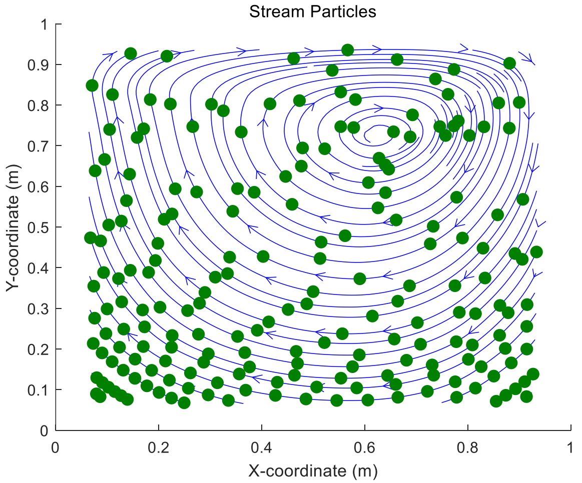




柯西动量方程（守恒形式）

- 例如：流体CFD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$



微分方程的求解方法

问题示例：
单位圆 Ω 上的泊松方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, u \text{ in } \Omega \\ u = 0, u \text{ on } \delta\Omega \end{cases}$$

显式求解

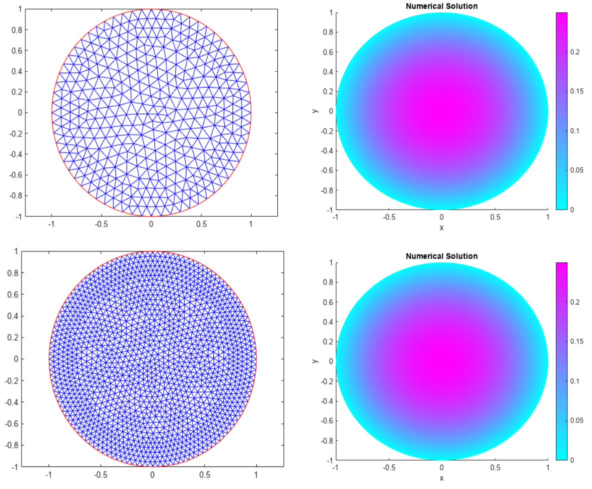
解析解：$u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{4}$

（实际应用中的微分方程通常不具有显式解）

数值求解

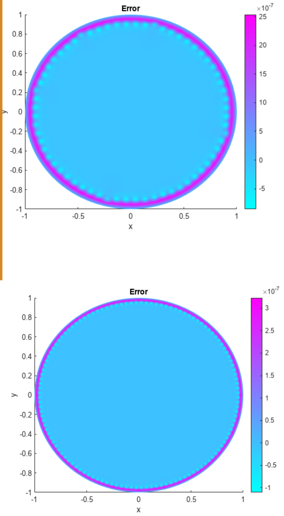
- 有限元方法：全区域离散，计算量随网格加密急剧上升
- 有限差分方法：全区域离散，较难处理复杂求解区域
- 边界元方法：高频奇异积分计算、复杂边界条件及变系数方程的推广

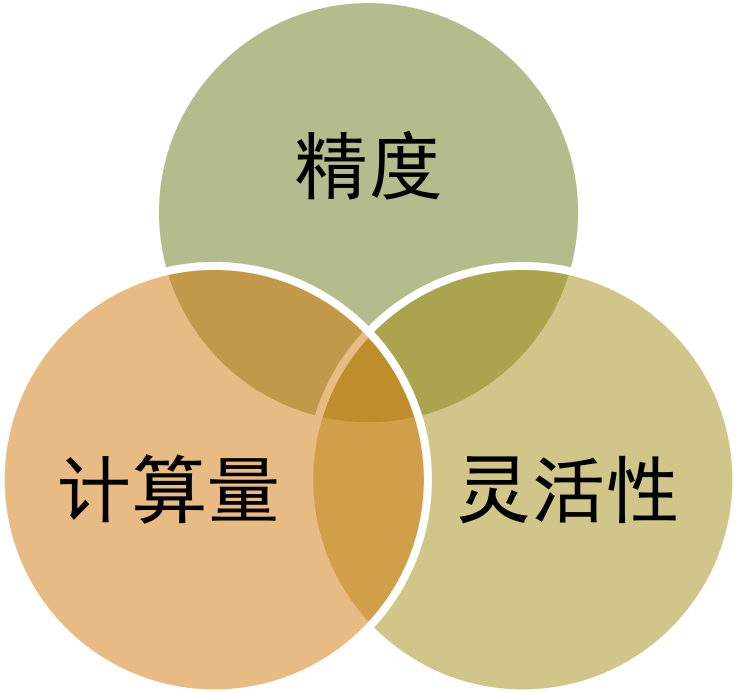
数值求解



error =

error =

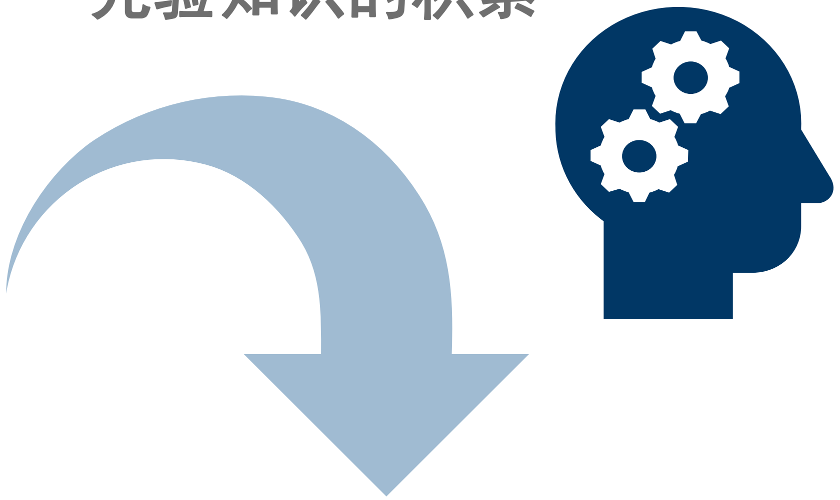




求解微分方程的“遗忘性”

- 已知解的信息极少被“用到”…;
- 每次计算都是“重新”开始…;
- 每次计算的结果都会被“遗忘”…;

先验知识的积累



“学习”机理

问：是否有能够利用解信息、不依赖于网格、具有“记忆性”的方法？

研究动机——设计问题

- 在设计问题或反问题计算中，往往需要改变边界条件，获得不同的解
- 如果能通过已知数据**“学习”**到解算子，就可以作用在不同边界条件直接获得解

获得解算子 → 输入边界条件 → 更新解

“学习”的思想

线性代数方程组为例, 已知A, 给定b, 求得x:

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

已知解数据X, 及对应的B, 学习A^{-1}： $X = A^{-1}B$

求解问题示例

求解方程:

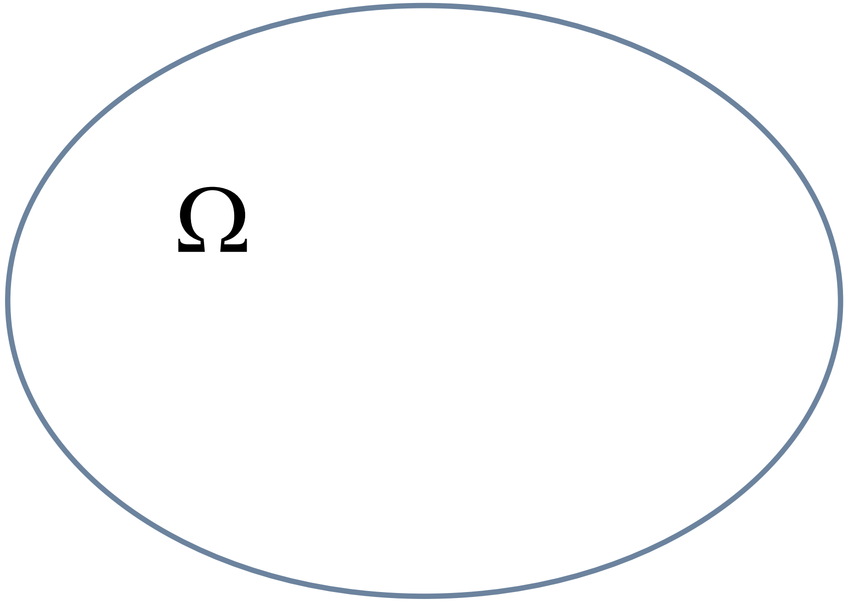
$$\begin{aligned} \Delta u = 0, &\quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = f, &\quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

其解可用积分算子表示为

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

其中 $G(x,y)$ 为带有边界条件的Green函数.

如何获得Green函数？



求解问题示例

- 途径一 由数值方法计算Green函数：精度、计算量局限
- 途径二 由数据获得Green函数

由边值和解数据，“学”Green函数

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

由边值和学得的Green函数，获得解

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

基本算法

- 对于$\forall x \in \Omega$，设有**训练集**$\{u_i(x)\}_{i=1}^{M}$，求解区域边界离散点为$\{x_j\}_{j=1}^{N}$，则可形成如下方程：

$$\left(u_1(x),\cdots,u_M(x)\right) = \left(A_1(x),\cdots,A_N(x)\right)\begin{pmatrix} u_1(x_1) & \cdots & u_M(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(x_N) & \cdots & u_M(x_N) \end{pmatrix}$$

训练函数在目标点的值
$B_{1\times M}$

边界-目标点解的映射
$A_{1\times N}$

训练函数在边界的值
$V_{N\times M}$

$$B_{1\times M} = A_{1\times N}\ V_{N\times M}$$

基本算法

- 第一步：获得“训练”数据矩阵

$$B_{1\times M} = A_{1\times N}V_{N\times M}$$

- 第二步：获得解算子 A

$$A = BV^{\dagger}$$

广义逆

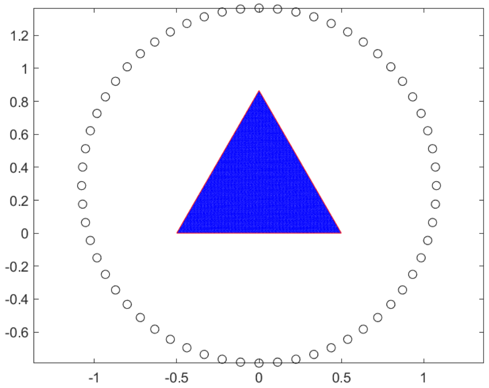
- 第三步：输入边界条件 f, 获得目标位置解:

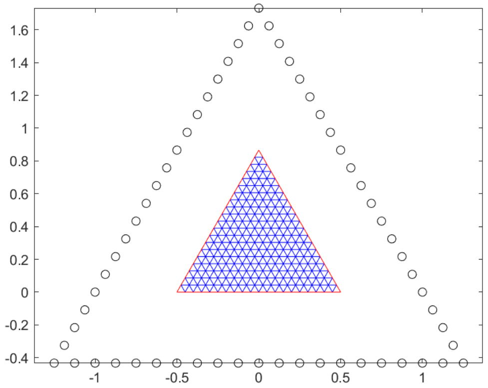
$$u(x) = Af = BV^{\dagger}f$$

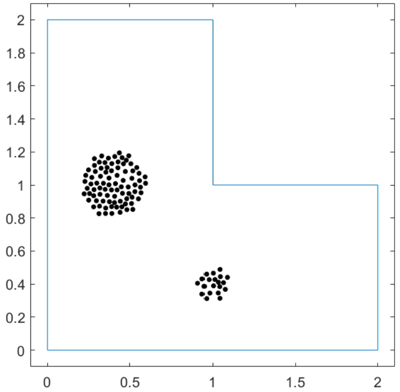
问题1:训练集--需要什么样的数据?

- 可能的数据
  - 实际测量值
  - 方程数值解
  - 基本解

  ……







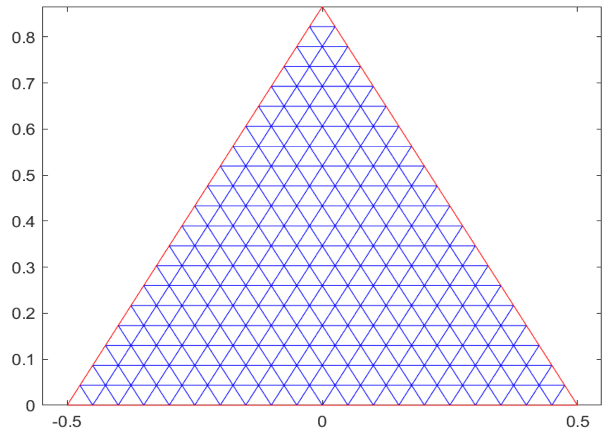
- 充分<u>利用PDE的性质</u>，可以有针对地获得充分、有效、可靠的数据

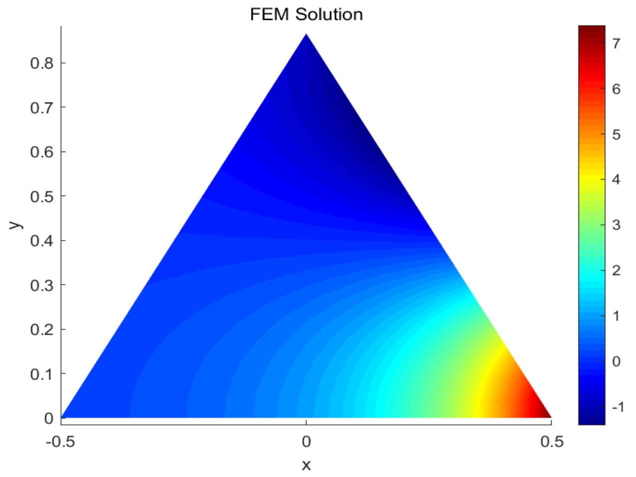
详见Cheng et al. 2022

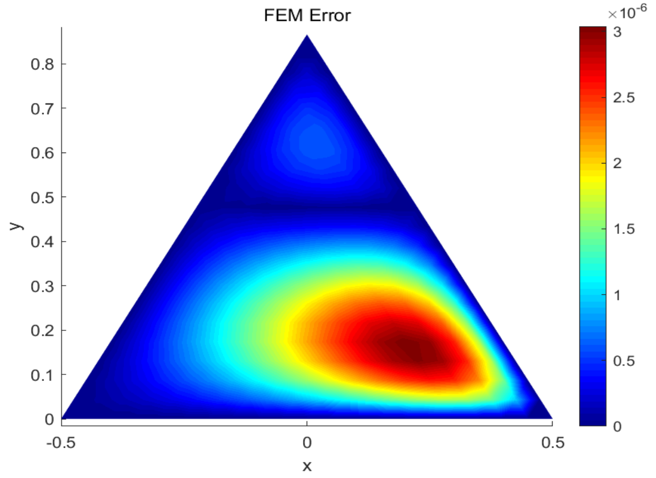
问题2: 算法可靠性/误差分析？

精确解： $u = e^{nx} \cos ny$

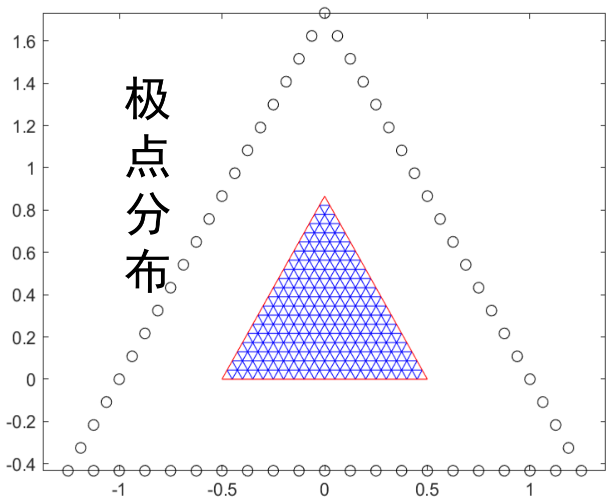
有限元

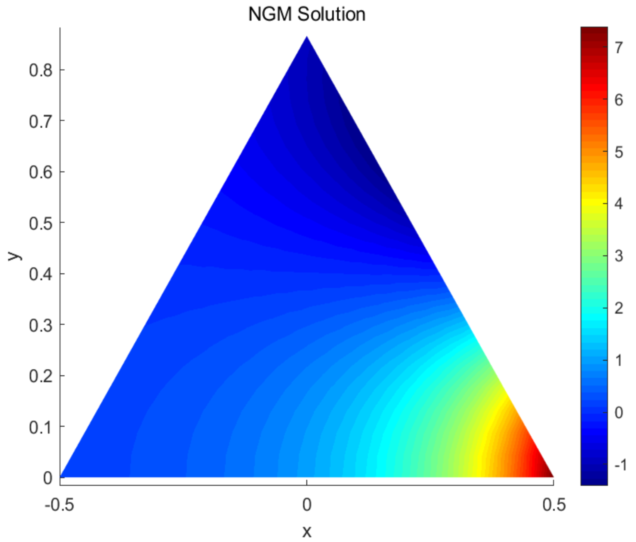


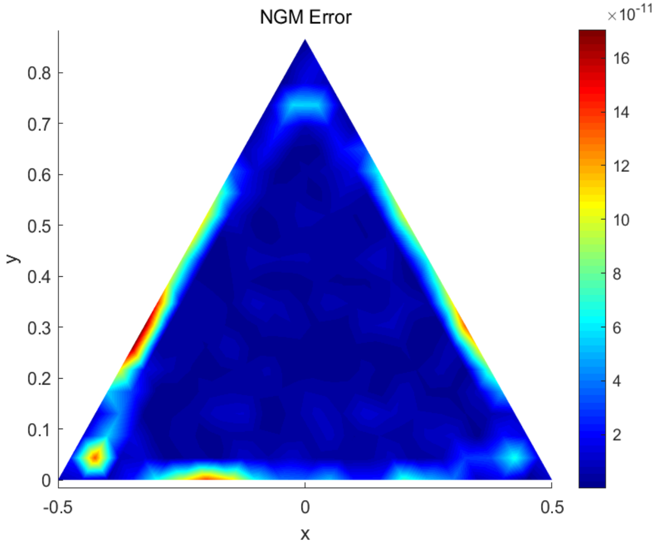




本方法







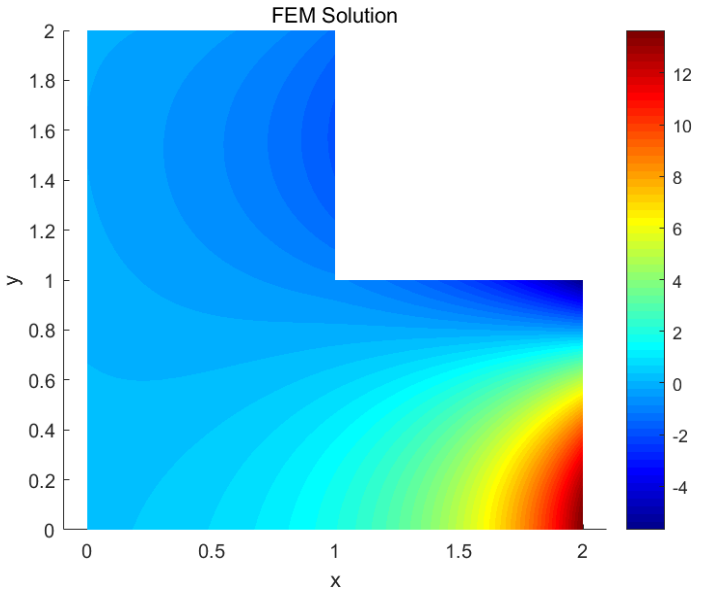
问题2: 算法可靠性/误差分析？

理论上：$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}_* \cdot V\|_2 \leq C\delta$

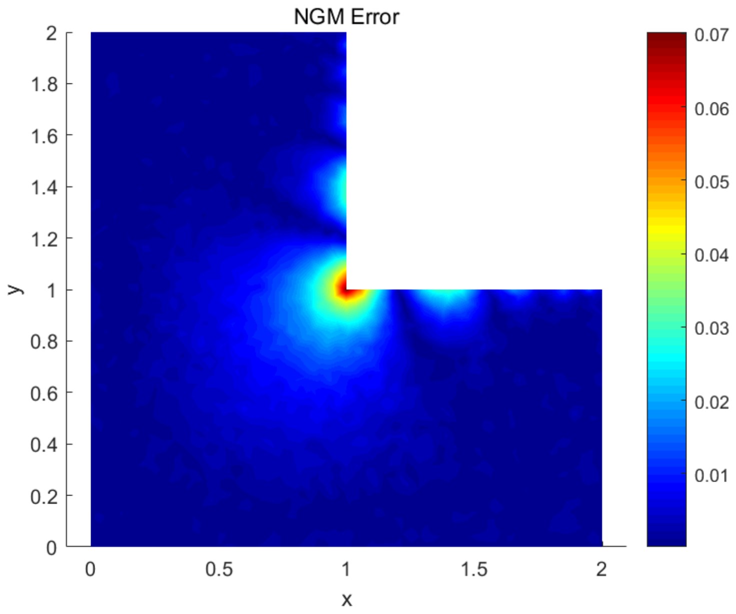
消除不规则点处的奇性

数值验证：

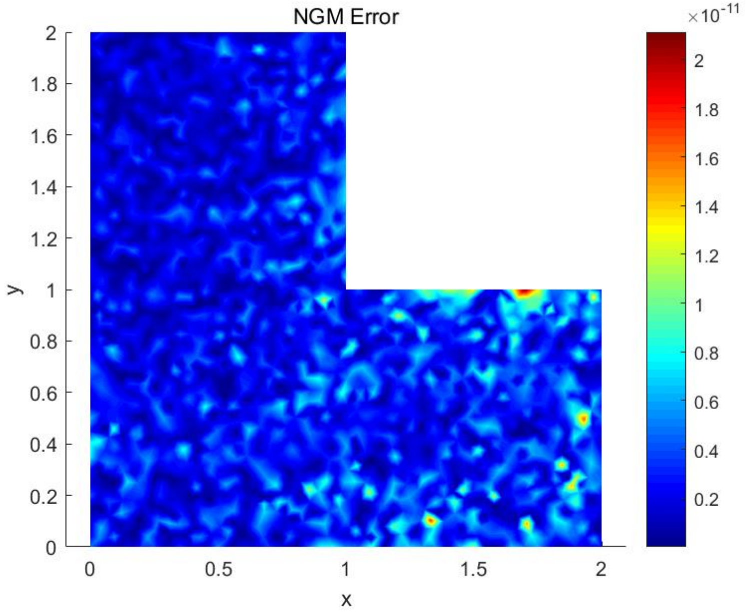
解分布（奇性+光滑）



误差：仅用极点：10^{-2}



误差：补充有限元数据：10^{-11}



问题3：方法特点及优势？

- 可在线快速更新解算子 —— 提高可靠性
- 利用方程性质 —— 提高精度、控制误差
- 与网格无关 —— 提高计算效率

可在线快速更新解算子

加入新的训练数据 $u_{M+1}(x_i), i = 1, \cdots, N$ 后，

N为边界离散点数/维数

$$V_1 \cdot V_1^* = V \cdot V^* + \begin{bmatrix} u_{M+1}(x_1) \\ \vdots \\ u_{M+1}(x_N) \end{bmatrix} \cdot [u_{M+1}(x_1), \cdots, u_{M+1}(x_N)]$$

$N^2/2$计算量

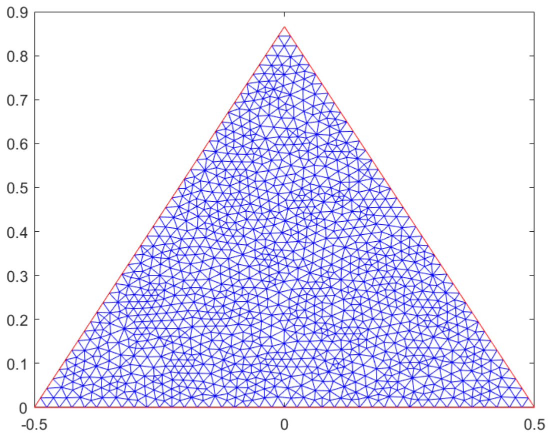
$N \times N$矩阵求逆

增加可靠性

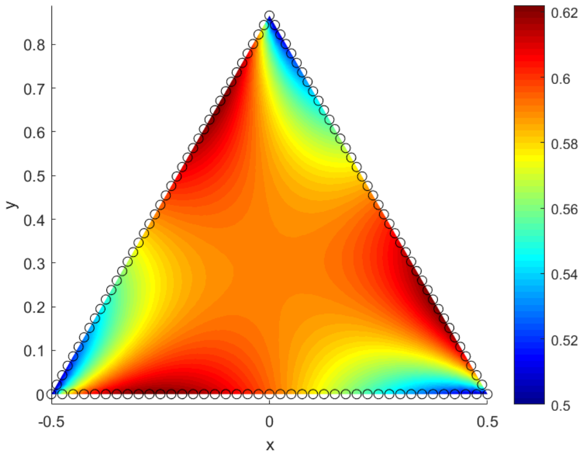
增加精度

获得解算子——计算规模小、可复用

有限元自由度：网格点



本方法自由度：边界点

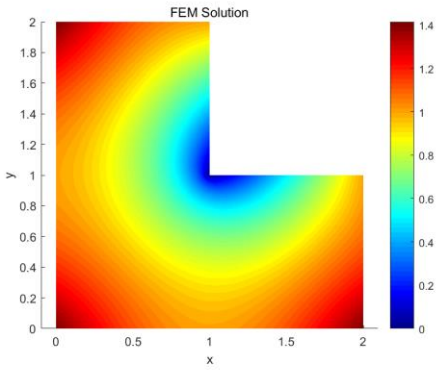


计算量验证

二维示例	矩阵规模	耗时
有限元	1246	0.174869
本方法（152组数据）	120	0.007473

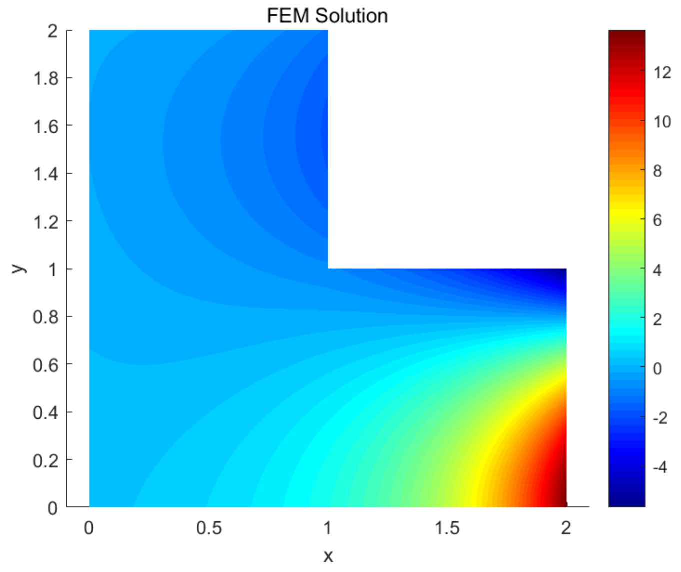
利用方程性质提升求解精度

解数据更新后（提升可靠性与精度）：

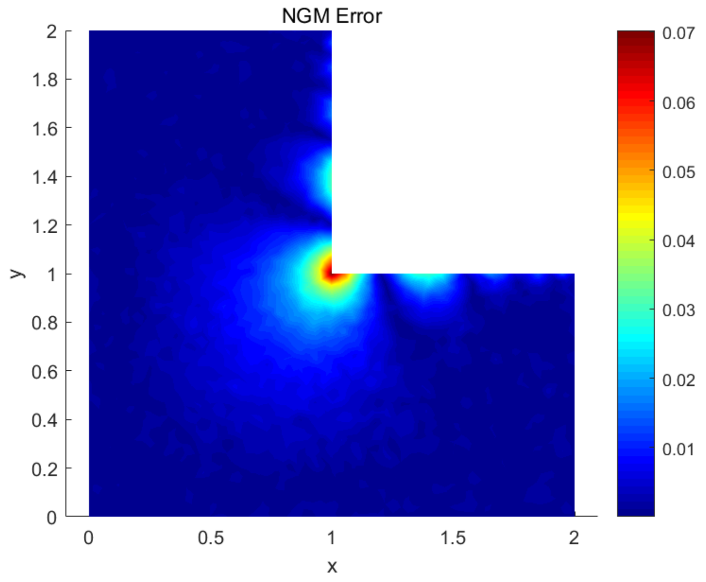


补充数据：包含奇性的其它解

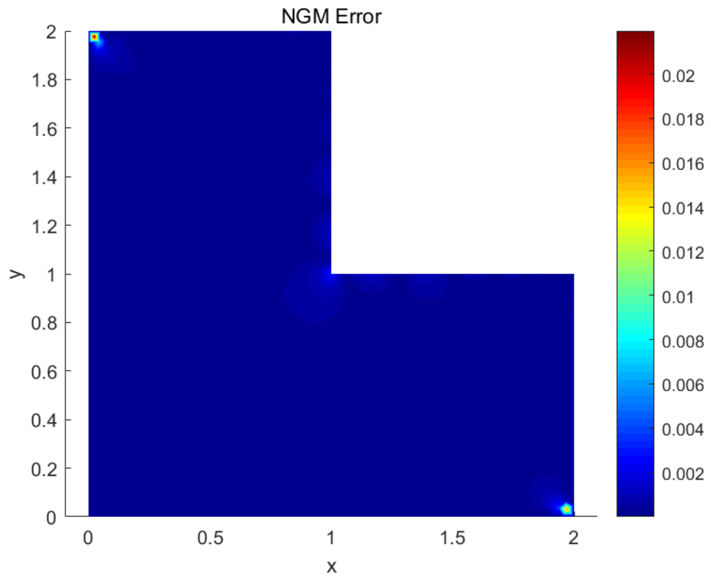
解分布



误差：仅用部分解数据

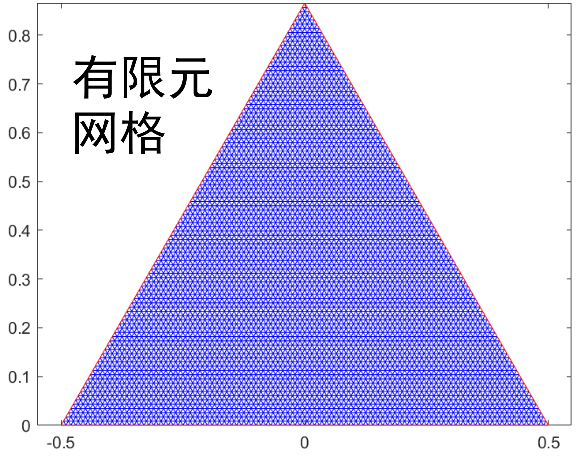


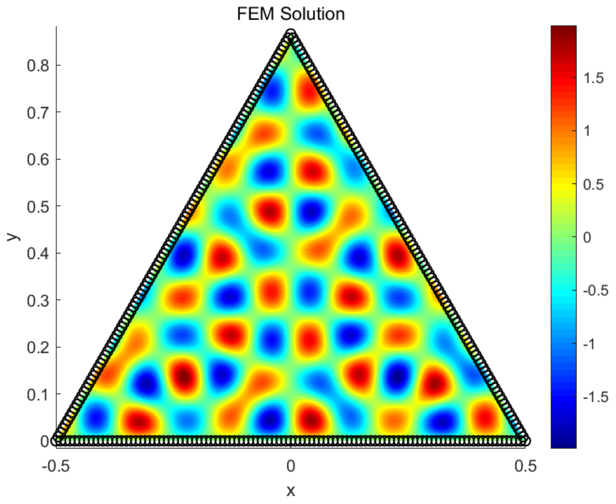
误差：补充数值解数据

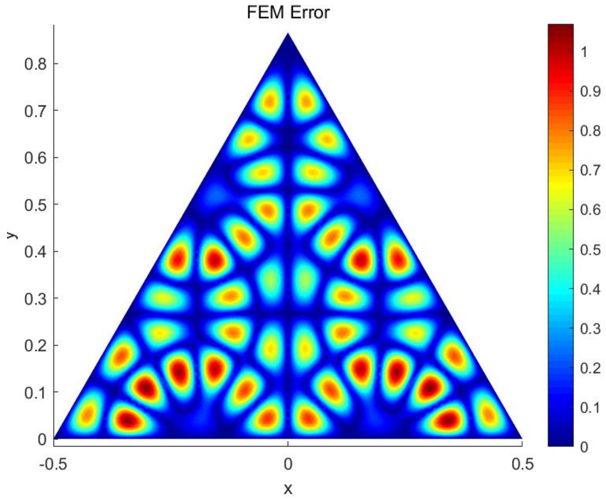


捕捉到边界奇性！

有效解决高波数问题



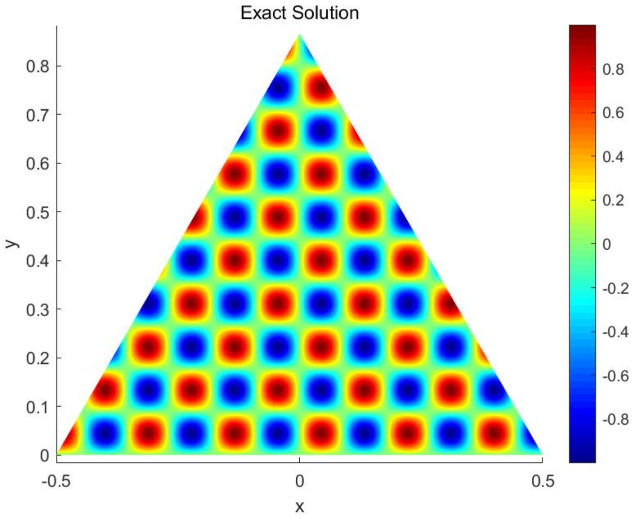


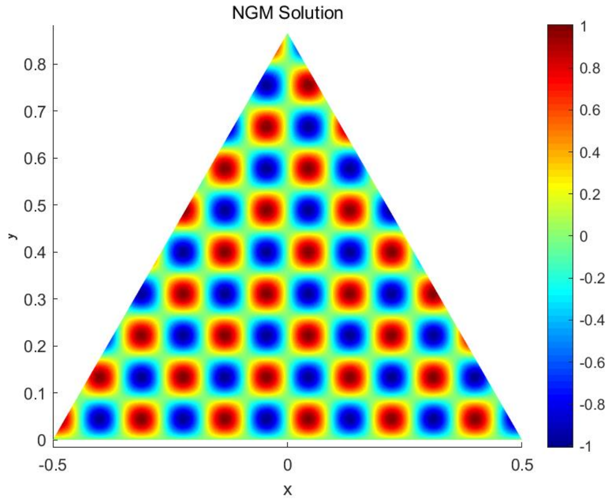


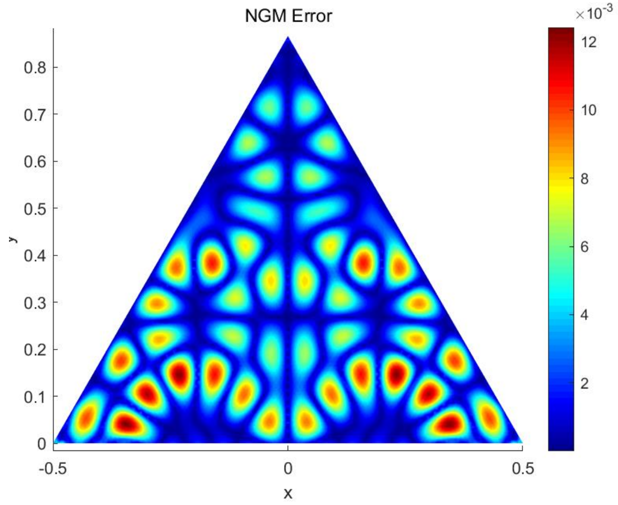
10^{0}

真实解 k=50

本方法：64组基本解数据







10^{-2}

不依赖内部网格分辨率，提高计算效率

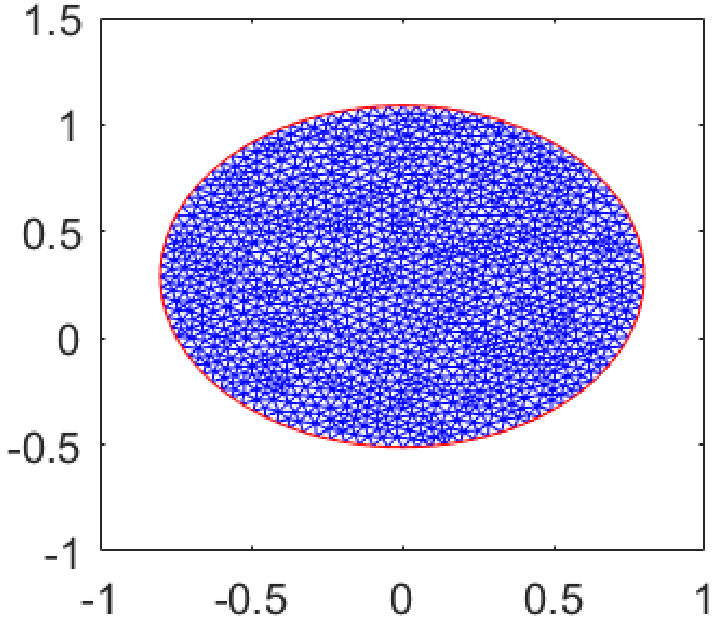
边界-目标点解的映射

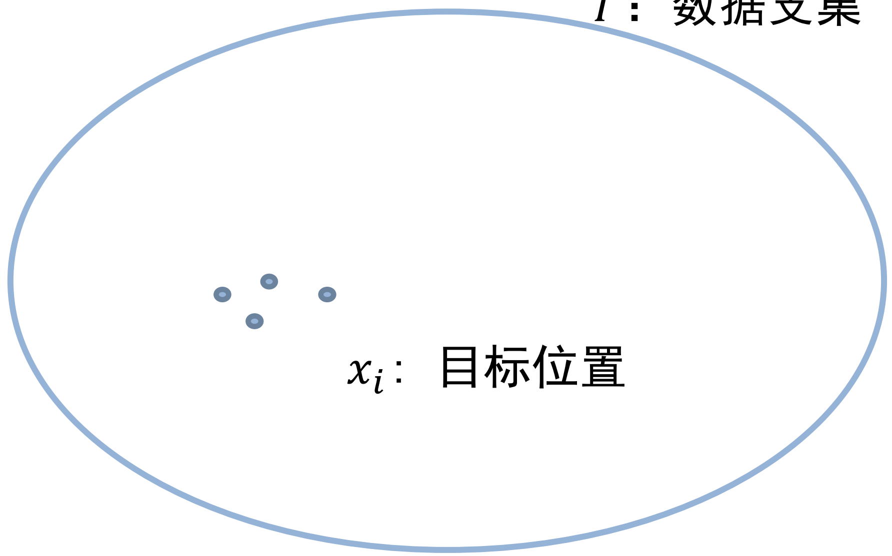
$$\left(A_1(x), \cdots, A_N(x)\right)$$

FEM：精度与网格分辨率有关，继而影响计算量

NGM：

- 精度与内部网格无关
- 计算量依赖目标位置数目，可并行！





不依赖内部网格分辨率，实现高精度计算

$f = 2000Hz$

有限元方法

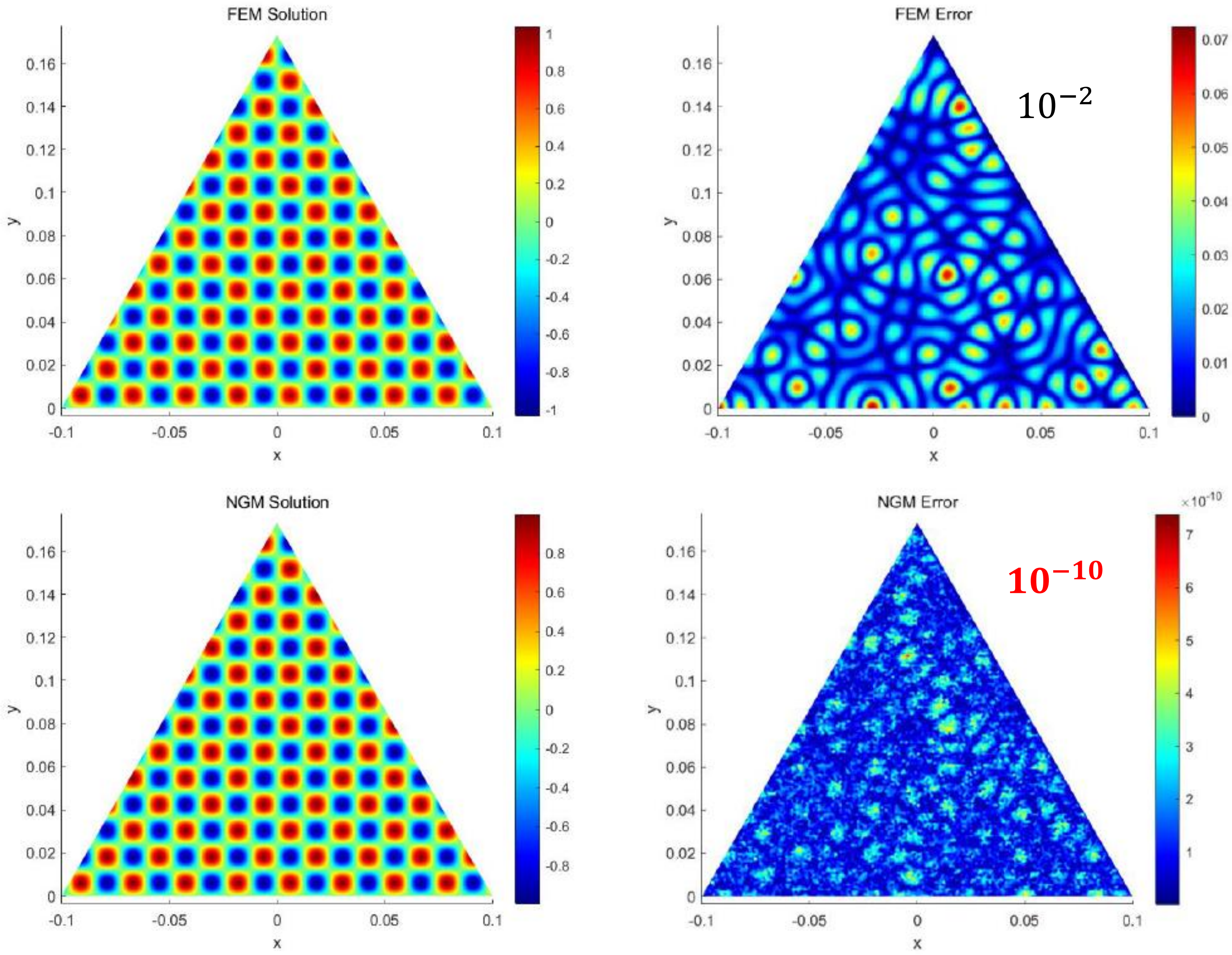
$h_{max} = 0.0025$

$k = \frac{2\pi * freq}{c}$

$freq$为频率，c为声速，取$340m/s$

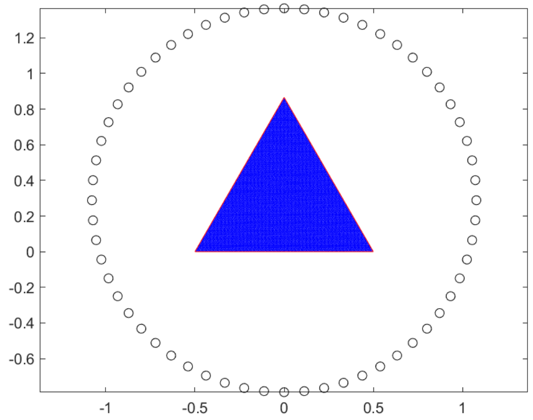
本方法

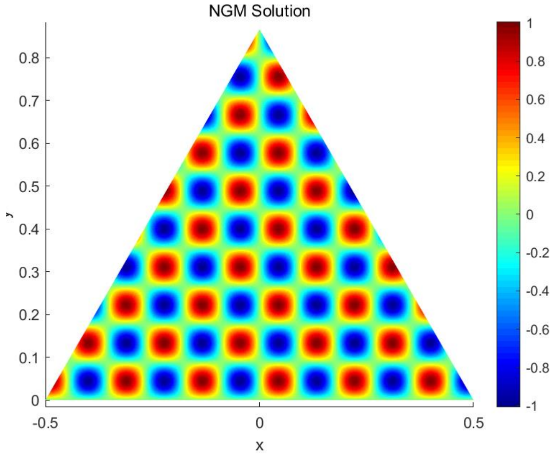
数据解180个

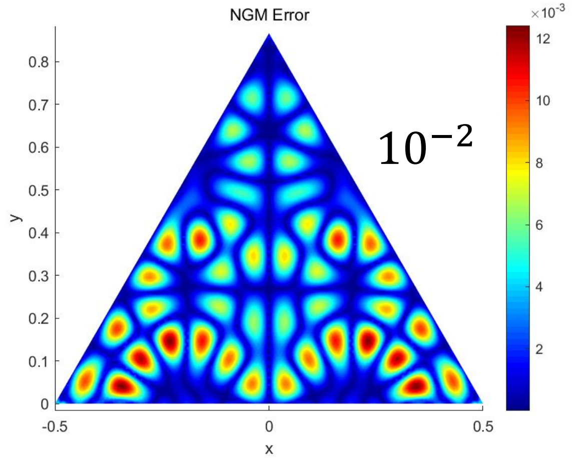


部署场景:声场计算及设计

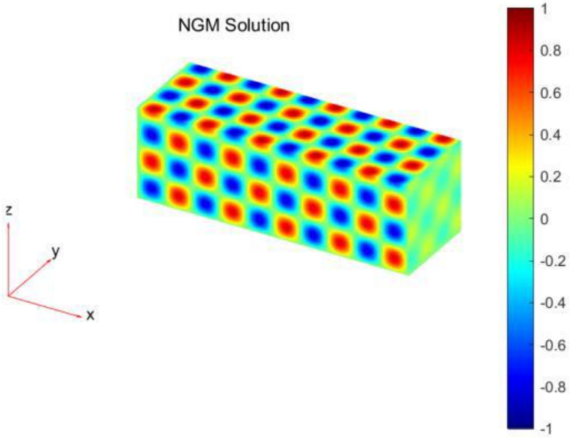
- 基本声场计算
  - 高精度
  - 计算效率

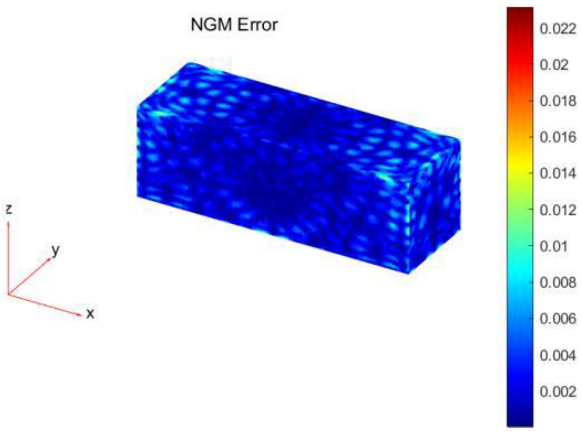






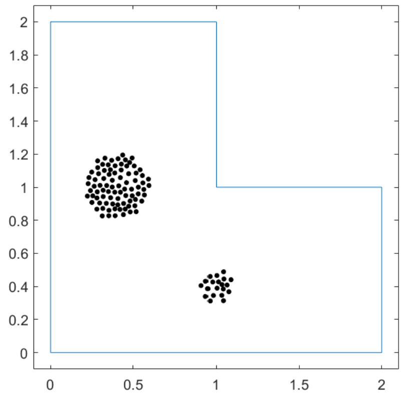
- 声学设计
  - 学得解算子矩阵后，改变边界条件（更新设计），可以直接获得更新的解
  - 加入新训练数据后可在线更新求解算子
  - 目标区域为局部时计算量显著降低



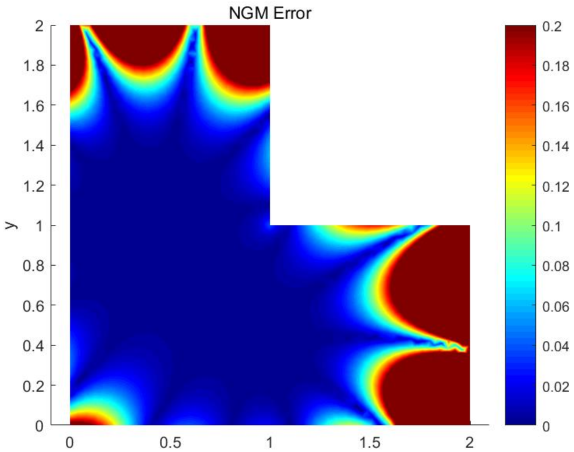


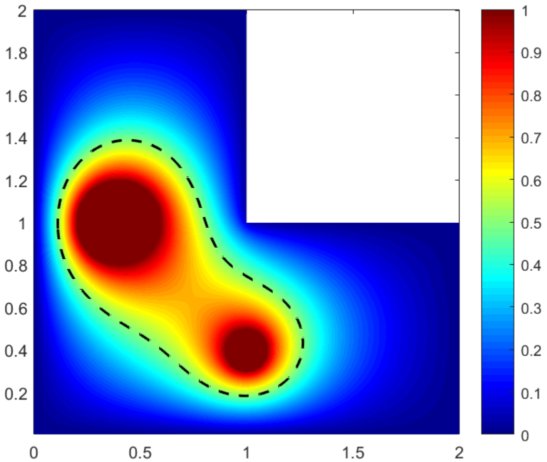
应用与推广

问题设计：

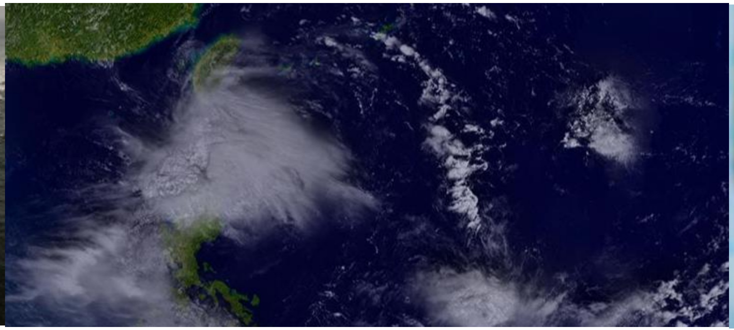


设计 → 局部测量 → 局部重构 / 可信区域

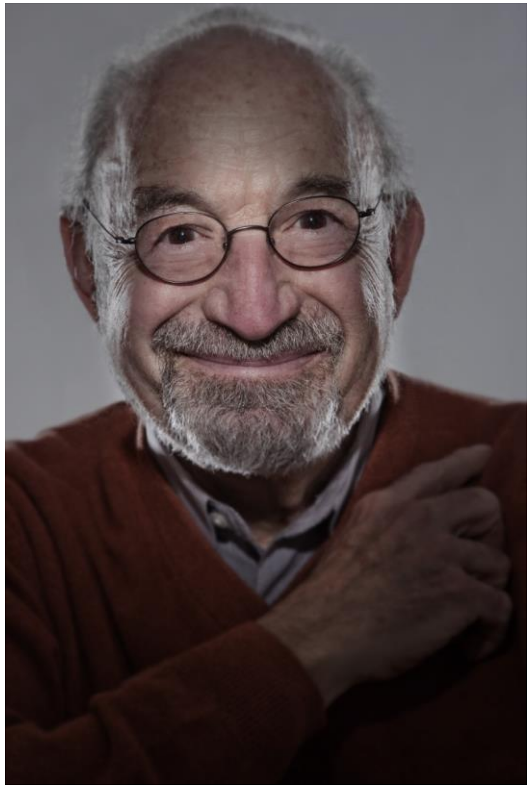









总结



"The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple."

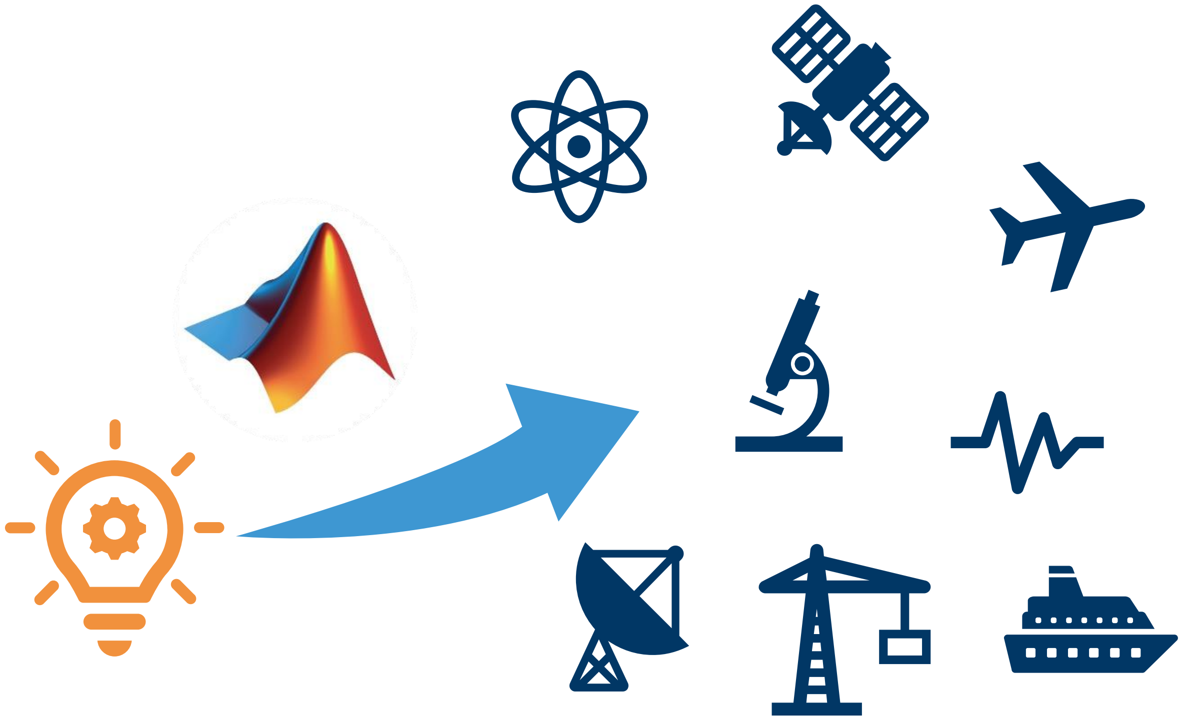
——Stan P. Gudder

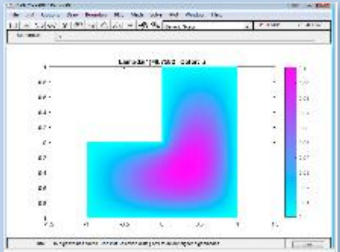
总结

- Meshless方法，计算精度只依赖训练函数、边界离散，与求解区域内部离散无关，因而当只关注局部区域的解时，计算量将很小。
- 所用“极点”，“加强边”对应的训练函数为精确调和函数，实际运用中可以用实际测量值或数值解等各类训练数据。
- 对于第二类边界条件、混合边界条件等，方法同样适用。
- 与有限元相比，可以发挥计算精度和效率优势，与传统边界积分方程方法相比，可以更好地发挥“数据”的优势。

“没有MATLAB这将是一条很长的路”

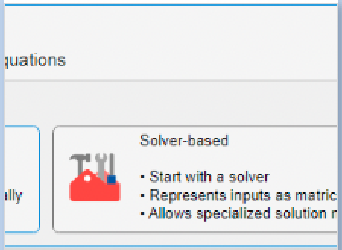
- 高性能的科学计算能力
- 丰富的应用工具箱及内置函数
- 强大的数据可视化功能





PDE Modeler

The **PDE Modeler** app provides an interactive interface for solving 2-D geometry problems. Using the app, you can create complex geometries

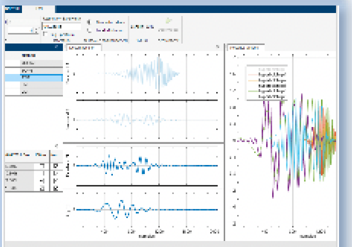


Optimize

The **Optimize** task lets you choose between two ways to interactively optimize problems or to solve nonlinear systems of equations:

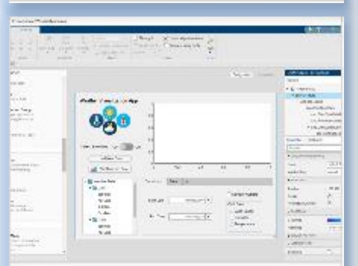
Curve Fitter

The **Curve Fitter** app provides a flexible interface where you can interactively fit curves and surfaces to data and view plots.



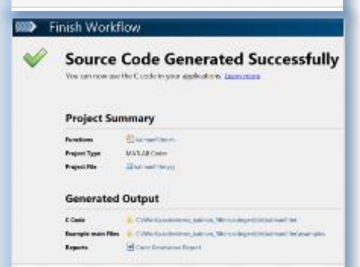
Signal Multiresolution Analyzer

The **Signal Multiresolution Analyzer** app is an interactive tool for visualizing multilevel wavelet- and data adaptive-based



App Designer

App Designer is an interactive development environment for designing an app layout and programming its behavior.



MATLAB Coder

The **MATLAB Coder** app generates C or C++ code from MATLAB code. You can generate:

MATLAB EXPO

Thank you

MathWorks®